

3.2.2. Die Lösungsformel für die Normalform der quadratischen Gleichung

allgemein	am Beispiel
$x^2 + px + q = 0 \quad -q$ $x^2 + px = -q$	$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad -4$ $x^2 + 5x = -4$
Wir bilden die quadratische Ergänzung und addieren diese auf beiden Seiten der Gleichung.	
$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = +\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = +\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4$
Nun lässt sich die linke Seite entsprechend der binomischen Formeln als vollständiges Quadrat schreiben.	
$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4$
Es kann auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden, wenn die rechte Seite größer als null ist. Dabei gilt $\sqrt{a^2} = a $	
Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, so gilt $\left x + \frac{p}{2}\right = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	Wegen $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 > 0$ gilt $\left x + \frac{5}{2}\right = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$
Bei Gleichungen mit Beträgen müssen Fallunterscheidungen durchgeführt werden. (Bei $ a = 4$ ist $a_1 = 4$ und $a_2 = -4$)	
$x_1 + \frac{p}{2} = +\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad -\frac{p}{2}$ $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$x_1 + \frac{5}{2} = +\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \quad -\frac{5}{2}$ $x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$ $x_1 = -1$
$x_2 + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad -\frac{p}{2}$ $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$x_2 + \frac{5}{2} = -\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \quad -\frac{5}{2}$ $x_2 = -\frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$ $x_2 = -4$

Im Tafelwerk finden wir als Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Hinweise:

-Die Herleitung dieser Lösungsformel wird nicht verlangt. Sie dient nur zum Verständnis von mathematischen Zusammenhängen.

-Auch für die allgemeine Form der quadratischen Gleichung gibt es eine Lösungsformel, die sich ähnlich herleiten lässt:

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$