2.3.2. Die Lösungsformel für die Normalform der quadratischen Gleichung

allgemein	am Beispiel
$x^2+px+q=0 \quad \vert -q$ $x^2+px=-q$	$x^2+5x+4=0 \quad \vert -4$ $x^2+5x=-4$
Wir bilden die quadratische Ergänzung und addieren diese auf beiden Seiten der Gleichung.	
$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=+\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$	$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=+\left(\frac{5}{2}\right)^2-4$
Nun lässt sich die linke Seite entsprechend der binomischen Formeln als vollständiges Quadrat schreiben.	
$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$	$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4$
Es kann auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden, wenn die rechte Seite größer als null ist. Dabei gilt $\sqrt{a^2}=\vert a\vert$	
Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$, so gilt $\left\vert x+\frac{p}{2}\right\vert=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$	Wegen $\left(\frac{5}{2}\right)^2-4>0$ gilt $\left\vert x+\frac{5}{2}\right\vert=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4}$
Bei Gleichungen mit Beträgen müssen Fallunterscheidungen durchgeführt werden. (Bei | a | = 4 ist $a_1 = 4$ und $a_2 = -4$)	
$x_1+\frac{p}{2}=+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \vert -\frac{p}{2}$ $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$	$x_1+\frac{5}{2}=+\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4} \quad \vert -\frac{5}{2}$ $x_1=-\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4}$ $x_1=-1$
$x_2+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \vert -\frac{p}{2}$ $x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$	$x_2+\frac{5}{2}=-\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4} \quad \vert -\frac{5}{2}$ $x_2=-\frac{5}{2}-\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4}$ $x_2=-4$

Im Tafelwerk finden wir als Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Hinweise:

- Die Herleitung dieser Lösungsformel wird nicht verlangt. Sie dient nur zum Verständnis von mathematischen Zusammenhängen.
- Lösungsformeln gibt es auch für die allgemeine Form der quadratischen Gleichung $\left(x_{1/2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)$ und für die Scheitelpunktsform $\left(x_{1/2}=-d\pm\sqrt{-\frac{e}{a}}\right)$, die sich ähnlich herleiten lassen.