### 3.1.3. Irrationale und reelle Zahlen

Viele Quadratwurzeln sind Dezimalbrüche, die unendlich sind und keine Periode enthalten.

DEF: Ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch ist eine IRRATIONALE ZAHL.

SATZ:  ist eine irrationale Zahl.

Den Beweis für diesen Satz führen wir INDIREKT:

* Wir nehmen an, dass  eine rationale Zahl ist.
* Wir zeigen, dass diese Annahme falsch ist.
* Damit ist der Satz bewiesen.

Annahme:  ist eine rationale Zahl.

1. Jede rationale Zahl lässt sich in der Form  darstellen, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen sind.
2. Es ist also . Dann gilt .
3. Durch Umformen erhält man .  ist also durch 2 teilbar. Damit ist auch p durch 2 teilbar und wir setzen .
4. Einsetzen ergibt  oder auch . Damit ist  eine gerade Zahl und auch q gerade.
5. Wenn p und q gerade sind, sind sie aber nicht teilerfremd und wir erhalten damit einen Widerspruch zu (1).

Damit ist gezeigt, dass  eine irrationale Zahl ist.

DEF: Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen zusammen bilden die REELLEN ZAHLEN.

Die reellen Zahlen werden mit R bezeichnet.

Es gelten folgende Teilmengenbeziehungen:

R

N

Q

Q+

Z