1.2. Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

1.2.1. Summen- und Komplementärregel

In einer Urne befinden sich Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 20.

Es sei

E_1 … die gezogene Zahl ist durch 4 teilbar

$E_1 = \{4;8;12;16;20\}$

Da jede Kugel (jedes Ergebnis) die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{20}$ hat, ist die Wahrscheinlichkeit von $P(E_1) = \frac{5}{20}$.

ELEMENTARE SUMMENREGEL

Betrachtet man bei einem Zufallsversuch mehrere Ergebnisse und fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass eines dieser Ergebnisse eintritt, so fasst man diese Ergebnisse zu einem Ereignis zusammen.

Hat ein Ereignis E die Ergebnisse a_1 bis a_n, so gilt

$P(E) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n)$

Weiterhin sei

E_2 … die gezogene Zahl ist durch 7 teilbar

$E_2 = \{7;14\}$

$P(E_2) = \frac{2}{20}$

E_1 und E_2 haben keine gemeinsamen Elemente. Berechnet man die Wahrscheinlichkeit für $E = E_1 \cup E_2$ (E … die gezogene Zahl ist durch 4 oder 7 teilbar), so gilt

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1) + P(E_2) \\ &= \frac{5}{20} + \frac{2}{20} \\ &= \frac{7}{20} \end{aligned}$$

Es sei

E_3 … die gezogene Zahl ist durch 6 teilbar

$E_3 = \{6;12;18\}$

$P(E_3) = \frac{3}{20}$

E_1 und E_3 haben das Ergebnis „12“ gemeinsam $(E_1 \cap E_3 = 12)$. Berechnet man die Wahrscheinlichkeit für $E = E_1 \cup E_3$ (E … die gezogene Zahl ist durch 4 oder 6 teilbar), so gilt

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_3) \\ &= \frac{5}{20} + \frac{3}{20} - \frac{1}{20} \\ &= \frac{7}{20} \end{aligned}$$

ALLGEMEINE SUMMENREGEL (Additionssatz)

$P(E)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1 \cap E_2)$ **für** $E=E_1 \cup E_2$

Betrachtet man

E_4 … die gezogene Zahl ist gerade und

E_5 … die gezogene Zahl ist ungerade,

so schließen sich die beiden Ereignisse gegenseitig aus und es gilt $E_4 \cup E_5 = \Omega$.

E_4 ist also das Gegenereignis von E_5. Deswegen ist $P(E_4) + P(E_5) = 1$

KOMPLEMENTÄRREGEL

Wenn $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$ **und** $E_1 \cup E_2 = \Omega$**, dann gilt** $P(E_1) + P(E_2) = 1$