### 1.4.7. Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bei Binomialverteilungen

Gegeben sind zwei Bernoulliversuche.

a) n = 100, p = 0,1 b) n = 50, p = 0,2

Es wird bei beiden Versuchen erwartet, dass 10 Erfolge eintreten.

(100 · 0,1 = 50 · 0,2 = 10)

DEF: ERWARTUNGSWERT EINER BINOMIALVERTEILUNG
Gegeben sei ein n-stufiger Bernoulliversuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Für den Erwartungswert µ der Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge gilt:
µ = E(X) = n · p

 

Das Maximum einer Binomialverteilung liegt in der Nähe des Erwartungswertes.

Aus den Verteilungen erkennen wir, dass die Werte unterschiedlich um den Erwartungswert streuen.

DEF: VARIANZ UND STANDARDABWEICHUNG BEI BINOMIALVERTEILUNGEN
Gegeben sei ein n-stufiger Bernoulliversuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrscheinlichkeit q = 1 – p.
Die Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge hat
die VARIANZ V(X) = n · p · q und
die STANDARDABWEICHUNG 

Das heißt für unsere Beispiele:

a) V(X) = 100 · 0,1 · 0,9 = 9, also s = 3

b) V(X) = 50 · 0,2 · 0,8 = 8, also s 2,83

Führt man eine große Anzahl von Versuchen durch, so werden die Histogramme mit steigendem n immer breiter und flacher. Oft kommt dem Erwartungswert keine große Bedeutung zu. Vielmehr ist interessant, wie viele Werte in der Nähe des Maximums ähnliche Wahrscheinlichkeiten haben.

Ein Versuch mit p = 0,1 wird 500-mal durchgeführt. Es ist µ = 50, V(X) = 45, s  6,71.



 r r

 µ

Welche Werte um den Erwartungswert (µ – r ≤ X ≤ µ + r) haben eine Gesamtwahrscheinlichkeit von etwa 90 %?



Jedem Radius lässt sich eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnen. Wählt man eine Umgebung r = 11 um den Erwartungswert, beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa 90 %.

Dabei zeigen weitere Versuche, dass der Quotient aus Radius und Standardabweichung bei einer Wahrscheinlichkeit von 90 % bei etwa 1,64 liegt. Es ist r = 1,64 s.

Zwischen dem Radius der Umgebung um einen Erwartungswert und der Wahrscheinlichkeit der Umgebung gibt es eine eindeutige Zuordnung. Diese ist umso genauer, je größer n ist. Dabei muss s > 3 sein (Laplace-Bedingung).

Für s > 3 gilt:

|  |  |
| --- | --- |
| P(µ – r ≤ X ≤ µ +r) | r |
| 0,90 | 1,64 s |
| 0,95 | 1,96 s |
| 0,99 | 2,58 s |