2.5.3. Koordinatengleichung einer Ebene

▸ **Eine Ebene kann auch durch eine Gleichung der Form ax + by + cz = d (Koordinatengleichung) beschrieben werden.**

Beispiel: Gegeben ist eine Ebene E mit $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$. Diese hat die Normalengleichung $E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}9\\6\\11\end{pmatrix}=0$ und die vereinfachte Normalengleichung $E:\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}9\\6\\11\end{pmatrix}=51$.

Daraus ergibt sich mit $\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}9\\6\\11\end{pmatrix}=51\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\6\\11\end{pmatrix}=51\Rightarrow 9x+6y+11z=51$ eine Koordinatengleichung der Ebene.

Aus dieser Koordinatengleichung lassen sich sehr schnell die Achsenabschnitte ermitteln.

Schnittpunkt mit			
x- Achse	y = 0 z = 0	9x = 51	$x=\frac{17}{3}$
y-Achse	x = 0 z = 0	6y = 51	$y=\frac{17}{2}$
z-Achse	x = 0 y = o	11z = 51	$z=\frac{51}{11}$

SATZ: Eine Ebene habe im Koordinatensystem die Gleichung ax + by + cz = d

(1) Der Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene.

(2) Die Ebene hat vom Ursprung den Abstand $\frac{|d|}{|\vec{n}|}=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(3) Die Ebene schneidet die Koordinatenachsen in den Spurpunkten A_1 ($\frac{d}{a}$ |0|0), A_2 (0| $\frac{d}{b}$ |0) und A_3 (0|0| $\frac{d}{c}$)

Von der Parameterdarstellung zur Koordinatendarstellung von Ebenen

Gegeben ist eine Ebene E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t_e\begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\-0{,}5\end{pmatrix}+s_e\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$

Es soll die Koordinatendarstellung gefunden werden.

1. Berechnen des Normalenvektors:

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 0{,}75 \\ -0{,}25 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 0{,}75 \\ -0{,}25 \end{pmatrix}$ ist also senkrecht zur Ebene E.

2. Berechnen von d und Angabe der Ebenengleichung

In die Gleichung $1{,}75x + 0{,}75y - 0{,}25z = d$ gibt man nun einen beliebigen Punkt der Ebene (z.B. A (1|1|1) ein.

$$1{,}75 \cdot 1 + 0{,}75 \cdot 1 - 0{,}25 \cdot 1 = d$$

$$d = 2{,}25$$

Damit ist $1{,}75x + 0{,}75y - 0{,}25z = 2{,}25$ eine Koordinatengleichung der Ebene.

Von der Koordinatendarstellung zur Parameterdarstellung von Ebenen

Gegeben ist eine Ebene E: $7x + 3y - z = 9$

Es soll die Parameterdarstellung gefunden werden.

1. Berechnen eines Punktes der Ebene:

Man wählt zwei Koordinaten beliebig und berechnet aus der Koordinatendarstellung die dritte Koordinate:

x = 0; z =0

Damit ergibt sich y = 3

2. Ermitteln der Spannvektoren

Die Spannvektoren der Ebene sind senkrecht zum Normalenvektor. Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = 7u_x + 3u_y - u_z = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 7v_x + 3v_y - v_z = 0$$

Man kann zwei Koordinaten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ frei wählen. Setzt man dabei verschiedene Koordinaten gleich Null, sind die beiden Vektoren auf keinen Fall parallel.

$u_x = 0$; $u_y = 1$	$v_x = 1$; $v_y = 0$
➔ $u_z = 3$	➔ $v_z = 7$

Damit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ eine Parameterdarstellung der Ebene.