### 2.3.3. Lagebeziehungen von Geraden

g ∧ h gegeben

g ∥ h?

g = h?

g ∩ h ≠ ∅?

g und h sind identisch

g und h sind echt parallel

g und h schneiden sich

g und h sind windschief

ja

nein

ja

ja

nein

nein

***(1) Test auf Parallelität***

Zwei Geraden sind parallel zueinander, wenn ihre Richtungsvektoren zueinander parallel sind.

DEF: Zwei Vektoren  und  heißen PARALLEL, wenn es eine reelle Zahl t gibt, so dass gilt: .

Beispiel 1:

Gerade g:  Gerade h: 

Da  und , gilt . Die Geraden g und h sind also parallel.

Beispiel 2:

Gerade g:  Gerade i: 

Da  und , gilt . Die Geraden g und i sind also parallel.

Beispiel 3:

Gerade g:  Gerade k: 

Da  kein Vielfaches von  ist, sind die Geraden g und k sind also nicht parallel.

Beispiel 4:

Gerade g:  Gerade l: 

Da  kein Vielfaches von  ist, sind die Geraden g und l sind also nicht parallel.

***(2) Test auf gemeinsame Punkte***

***(2.1) Test für parallele Geraden***

Parallele Geraden haben keinen Punkt (echt parallel) oder unendlich viele Punkte gemeinsam. Es ist also ausreichend, mit einem beliebigen Punkt der ersten Geraden die Punktprobe mit der zweiten Geraden durchzuführen.

Beispiel 1:

Gerade g:  Gerade h: 

Auf der Geraden g liegt der Punkt A (–2| 1| 2).

Punktprobe mit h: 

Gleichungssystem:

–2 = –5 – 3 tk

1 = 1 + 9 tk

2 = 10 + 6 tk

Es gibt keine Lösung. Es ist also g ∥ h, aber nicht g  h (echt parallel).

Beispiel 2:

Gerade g:  Gerade i: 

Auf der Geraden g liegt der Punkt A (–2| 1| 2)

Punktprobe mit i: 

Gleichungssystem:

–2 = 2 – 2 ti

1 = –11 + 6 ti

2 = –6 + 4 ti

Das Gleichungssystem hat die Lösung ti = 2. Es ist also g ∥ h, und g  h (identisch).

***(2.2) Test für nichtparallele Geraden***

Zum Berechnen von Schnittpunkten löst man die Vektorgleichung .

Beispiel 3:

Gerade g:  Gerade k: 



Gleichungssystem:

–2 + 2 tg= –7 + 3 tk

1 – 6 tg= –20 + 3 tk

2 – 4 tg= –15 + 3 tk

Das Gleichungssystem hat die Lösung tg = 2 und tk = 3. Die Geraden g und k haben einen Schnittpunkt.

Der Ortsvektor des Schnittpunktes S kann berechnet werden mit:

g:  oder

k: 

Die Geraden g und k schneiden sich in S (2|–11|–6)

Beispiel 4:

Gerade g:  Gerade l: 



Gleichungssystem:

–2 + 2 tg= 1 + 2 tl

1 – 6 tg= 3 + 4 tl

2 – 4 tg= 4 + 6 tl

Löst man die ersten beiden Gleichungen des Systems, so erhält man die Lösung tg = 0,4 und tl = –1,1. Diese Parameter sind aber keine Lösung der dritten Gleichung.

Das Gleichungssystem hat also keine Lösung.

Die Geraden g und l sind zueinander windschief.