1.5. Funktionenscharen

1.5.1. Ganzrationale Funktionenscharen

Eine Funktionenschar beinhaltet mindestens einen Parameter. Für jeden Wert dieses Parameters erhält man eine andere Funktion.

Gegeben ist eine Funktionenschar $f_a(x) = -\frac{3}{2a}x^3 - 3x^2 - \frac{3a}{2}x$ mit $a > 0$.

Symmetrie:

Theorie:

nur gerade Exponenten → Achsensymmetrie: $f_a(x) = f_a(-x)$

nur ungerade Exponenten → Punktsymmetrie: $-f_a(x) = f_a(-x)$

Die Funktion $f_a(x) = -\frac{3}{2a}x^3 - 3x^2 - \frac{3a}{2}x$ ist nicht punktsymmetrisch zum Ursprung und nicht symmetrisch zur 2. Achse.

Verhalten im Unendlichen

Theorie:

Ganzrationale Funktionen verhalten sich im Unendlichen wie die Grundfunktion mit der höchsten Potenz.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = -\infty$

Schnittpunkte mit den Achsen:

Theorie:

Schnittpunkt mit der y-Achse → x = 0

Alle ganzrationalen Funktionen ohne absolutes Glied verlaufen durch den Ursprung.

$f_a(0) = 0$

Theorie:

Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstellen) → $f_a(x) = 0$

Lösungsmöglichkeiten:

kein absolutes Glied: $x_1 = 0$, danach x ausklammern

biquadratisch: Substitutionsmethode und p-q-Formel

$$f_a(x) = -\frac{3}{2a}x^3 - 3x^2 - \frac{3a}{2}x$$

$$0 = -\frac{3}{2a}x^3 - 3x^2 - \frac{3a}{2}x$$

$$0 = x\left(-\frac{3}{2a}x^2 - 3x - \frac{3a}{2}\right) \qquad x_1 = 0$$

$$0 = -\frac{3}{2a}x^2 - 3x - \frac{3a}{2} \qquad \Big| : \left(-\frac{3}{2a}\right)$$

$$0 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x_{2/3} = -a \pm \sqrt{a^2 - a^2}$$

$$x_{2/3} = -a$$

Die Funktionenschar hat eine doppelte Nullstelle bei x = –a (Funktion berührt an dieser Stelle die x-Achse → gleichzeitig Extremstelle).

Extremwerte:

Theorie:

notwendige Bedingung: $f'_a(x) = 0$

	$f''_a(t) < 0$	Hochpunkt
hinreichende Bedingung	$f''_a(t) > 0$	Tiefpunkt
	$f''_a(t) = 0$	Vorzeichenwechselkriterium

Untersuchung der notwendigen Bedingung

$$f'_a(x) = -\frac{9}{2a}x^2 - 6x - \frac{3a}{2}$$

$$0 = -\frac{9}{2a}x^2 - 6x - \frac{3a}{2} \qquad \Big| : \left(-\frac{9}{2a}\right)$$

$$0 = x^2 + \frac{4a}{3}x + \frac{1}{3}a^2$$

$$x_{1/2} = -\frac{2a}{3} \pm \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{1}{3}a^2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{2a}{3} \pm \frac{a}{3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}a$$

$$x_2 = -a$$

Untersuchung der hinreichenden Bedingung

$$f''_a(x) = -\frac{9}{a}x - 6$$

$$f''\left(-\frac{1}{3}a\right) = \frac{9}{a} \cdot \frac{1}{3}a - 6 < 0 \qquad \text{Hochpunkt}$$

$$f''(-a) = \frac{9}{a} \cdot a - 6 > 0 \qquad \text{Tiefpunkt}$$

Bestimmen der y-Werte

$$f_a\left(-\frac{1}{3}a\right)=-\frac{3}{2a}\left(-\frac{1}{3}a\right)^3-3\left(-\frac{1}{3}a\right)^2-\frac{3a}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}a\right)=\frac{2}{9}a^2$$

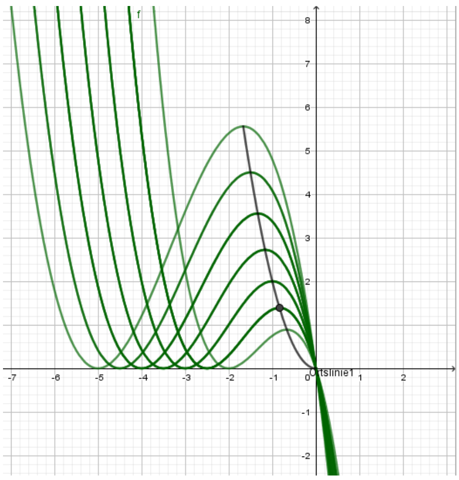
$$f_a(-a)=-\frac{3}{2a}(-a)^3-3(-a)^2-\frac{3a}{2}\cdot(-a)=0$$

Zusammenfassung Extrempunkte

Hochpunkt $H\left(-\frac{1}{3}a\middle|\frac{2}{9}a^2\right)$

Tiefpunkt $T(-a|0)$

Ortskurve der Extremwerte



Mit verändertem Parameter a „wandert" der Hochpunkt im Koordinatensystem. Dabei bildet die Menge der Hochpunkte eine Funktion. Diese nennt man die ORTSKURVE des Extrempunktes.

Es soll die Gleichung der Ortskurve bestimmt werden.

geg.: $H\left(-\frac{1}{3}a\middle|\frac{2}{9}a^2\right)$, also

$x_{HP}=-\frac{1}{3}a$ und $y_{HP}=\frac{2}{9}a^2$

Die Gleichung für den x-Wert wird nach a umgestellt und in die Gleichung für den y-Wert eingesetzt.

$$x_{HP}=-\frac{1}{3}a$$
$$a=-3x$$

$$y_{HP}=\frac{2}{9}a^2 \qquad a=-3x$$
$$y=\frac{2}{9}\cdot(-3x)^2$$
$$y=2x^2$$

Die Ortskurve des Hochpunktes der Schar $f_a(x)=-\frac{3}{2a}x^3-3x^2-\frac{3a}{2}x$ hat die Gleichung $y=2x^2$.

Wendepunkte:

Theorie:

notwendige Bedingung: $f''(x)=0$

	$f'''(x)<0$	Links-Rechts
hinreichende Bedingung:	$f'''(x)>0$	Rechts-Links
	$f'''(x)=0$	Vorzeichenwechselkriterium

Wendepunkt → stärkstes Gefälle bzw. größte Steigung

Untersuchung der notwendigen Bedingung

$$f_a''(x) = -\frac{9}{a}x - 6$$

$$0 = -\frac{9}{a}x - 6$$

$$x = -\frac{2}{3}a$$

Untersuchung der hinreichenden Bedingung

$$f_a'''(x) = -\frac{9}{a}$$

$$f_a'''\left(-\frac{2}{3}a\right) < 0 \qquad \text{Links-Rechts}$$

Bestimmen der y-Werte

$$f_a\left(-\frac{2}{3}a\right) = -\frac{3}{2a}\left(-\frac{2}{3}a\right)^3 - 3\left(-\frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{3a}{2}\left(-\frac{2}{3}a\right)$$

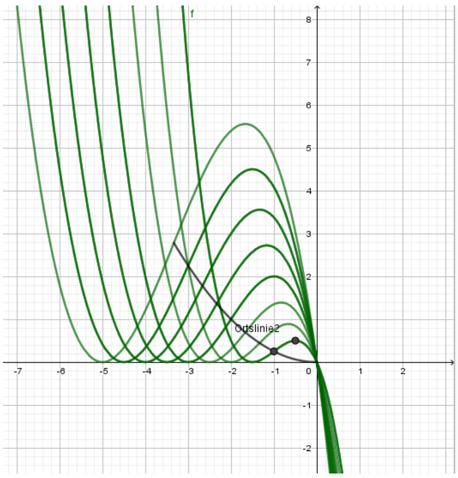
$$f_a\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{3}a^2 + a^2$$

$$f_a\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{9}a^2$$

Zusammenfassung Wendepunkte

$$W\left(-\frac{2}{3}a \middle| \frac{1}{9}a^2\right)$$

Ortskurve der Wendepunkte



Analog zu den Extremwerten wird in dieser Schar auch durch die Wendepunkte eine Ortslinie erzeugt.

geg.: $W\left(-\frac{2}{3}a \middle| \frac{1}{9}a^2\right)$, also

$$x_{WP} = -\frac{2}{3}a \text{ und } y_{WP} = \frac{1}{9}a^2$$

Die Gleichung für den x-Wert wird nach a umgestellt und in die Gleichung für den y-Wert eingesetzt.

$$x_{WP} = -\frac{2}{3}a$$

$$a = -\frac{3}{2}x$$

$$y_{WP} = \frac{1}{9}a^2 \qquad a = -\frac{3}{2}x$$

$$y = \frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{3}{2}x\right)^2$$

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

Wendetangente und Wendenormale

Theorie:

In den Wendepunkten kann eine Tangente (Wendetangente) bzw. eine Funktion senkrecht zum Graphen (Wendenormale) gesucht sein.

Es handelt sich dabei im lineare Funktionen der Form $t(x) = mx + n$.

Bestimmung der Wendetangente in $W\left(-\frac{2}{3}a \middle| \frac{1}{9}a^2\right)$

Der Anstieg m ist gleich $f'\left(-\frac{2}{3}a\right)$.

$$f_a'\left(-\frac{2}{3}a\right) = -\frac{9}{2a}\left(-\frac{2}{3}a\right)^2 - 6\left(-\frac{2}{3}a\right) - \frac{3a}{2}$$

$$f_a'\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{2}a$$

Der Achsenabschnitt kann aus dem Anstieg $\frac{1}{2}a$ und $W\left(-\frac{2}{3}a \middle| \frac{1}{9}a^2\right)$ bestimmt werden.

$$t(x) = mx + n$$

$$\frac{1}{9}a^2 = \frac{1}{2}a \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right) + n$$

$$n = \frac{4}{9}a^2$$

Damit hat die Wendetangente in $W\left(-\frac{2}{3}a \middle| \frac{1}{9}a^2\right)$ die Gleichung $t(x) = \frac{1}{2}ax + \frac{4}{9}a^2$.

Bestimmung der Wendenormale in $W\left(-\frac{2}{3}a \middle| \frac{1}{9}a^2\right)$

Der Anstieg der Wendetangente ist gleich $\frac{1}{2}a$. Da die Normale senkrecht auf der Tangente steht, ist deren Anstieg gleich $-\frac{2}{a}$ $\left(m_t = -\frac{1}{m_n}\right)$.

Der Achsenabschnitt kann aus dem Anstieg $-\frac{2}{a}$ und $W\left(-\frac{2}{3}a \middle| \frac{1}{9}a^2\right)$ bestimmt werden.

$$n(x) = mx + n$$

$$\frac{1}{9}a^2 = -\frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right) + n$$

$$n = \frac{1}{9}a^2 - \frac{4}{3}$$

Damit hat die Wendenormale in $W\left(-\frac{2}{3}a \middle| \frac{1}{9}a^2\right)$ die Gleichung $n(x) = -\frac{2}{a}x + \frac{1}{9}a^2 - \frac{4}{3}$.

Definitionsbereich:

Alle ganzrationalen Funktionen haben den Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$. Dies kann insbesondere bei Sachaufgaben eingeschränkt sein.

Wertebereich:

Beim Wertebereich müssen ggf. Hoch- und Tiefpunkte beachtet werden die den Wertebereich begrenzen können

Stammfunktion und Flächenintegral:

$$f_a(x) = -\frac{3}{2a}x^3 - 3x^2 - \frac{3a}{2}x$$

Dann ist eine Stammfunktion $\int f_a(x)dx = \int\left(-\frac{3}{2a}x^3 - 3x^2 - \frac{3a}{2}x\right)dx = -\frac{3}{8a}x^4 - x^3 - \frac{3a}{4}x^2 + C$

Soll jetzt die mit der x-Achse eingeschlossene Fläche berechnet werden, heißt das

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0}\left(-\frac{3}{2a}x^3 - 3x^2 - \frac{3a}{2}x\right) = \left[-\frac{3}{8a}x^4 - x^3 - \frac{3a}{4}x^2\right]_{-a}^{0} &= -\left(-\frac{3}{8a}a^4 + a^3 - \frac{3a}{4}a^2\right) \\ &= \frac{3}{8}a^3 - a^3 + \frac{3}{4}a^3 \\ &= \frac{1}{8}a^3\end{aligned}$$