1.3.3. Rekonstruktion von Beständen

Bei vielen Prozessen ist nicht eine Bestandsfunktion f sondern lediglich deren Änderungsrate f‘ bekannt. Als Beispiele kennen wir schon

- Zuwachsrate der Erdbevölkerung
- Geschwindigkeit als Änderungsrate des zurückgelegten Weges
- Zu- und Abfluss von Wasser in Talsperren
- Kraft als Änderungsrate der verrichteten Arbeit.

Beispiel:
Ein Land besitzt 60 Millionen Einwohner. Die Wachstumsrate beträgt zu Beginn 1 Million Personen pro Jahr und im 5. Jahr 0,951 Millionen Personen pro Jahr.
Die Wachstumsrate wird durch die Funktion $N'(t)=a\cdot e^{-bt}$ beschrieben (t … Zeit in Jahren).

a) Welche Werte haben die Parameter a und b?
b) Wie lautet die Bestandsfunktion N(t)?
c) Wann hat sich die Bevölkerung verdoppelt?
d) Wie viele Personen leben voraussichtlich „in ferner Zukunft“ in diesem Land?

Zur Bestimmung der Parameter erhält man anhand der gegebenen Größen das Gleichungssystem

$$\text{I}\quad 1000000=a\cdot e^{-b\cdot 0}$$

$$\text{II}\quad 951000=a\cdot e^{-b\cdot 5}$$

Daraus ergeben sich a = 1000000 und b = 0,01. Die Wachstumsrate wird also mit $N'(t)=1000000\cdot e^{-0,01t}$ beschrieben.

Für die Ermittlung der Bestandsfunktion N(t) wird N‘(t) integriert.

$$N(t)=\int N'(t)dt=-100000000\cdot e^{-0,01t}+c.$$

Zum Zeitpunkt t = 0 hatte das Land 60 Millionen Einwohner. Die Konstante c beträgt demzufolge 160000000 und die Bestandsfunktion lautet

$$N(t)=-100000000\cdot e^{-0,01t}+160000000$$

Hat sich die Einwohnerzahl verdoppelt, so leben in diesem Land 120000000 Einwohner.

$$\begin{aligned}
120000000&=-100000000\cdot e^{-0,01t}+160000000 && |-160000000\\
-40000000&=-100000000\cdot e^{-0,01t} && |:(-100000000)\\
0,4&=e^{-0,01t} && |\ln\\
\ln 0,4&=-0,01t && |:(-0,01)\\
t&=91,63
\end{aligned}$$

Bei gleichbleibender Wachstumsrate hat sich die Bevölkerung nach ca. 92 Jahren verdoppelt.

Für eine Prognose über die „ferne Zukunft“ bilden wir den Grenzwert $t\to\infty$.

$$\lim_{t\to\infty}N(t)=\lim_{t\to\infty}\left(-100000000\cdot e^{-0,01t}+160000000\right)=160000000$$