1.3.2. Flächen zwischen Kurven

Welche Fläche schließen die Funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2$ und $g(x) = x - 3$ ein?

SATZ: Gilt $f(x) > g(x)$ für alle x mit $a < x < b$, so ist der Flächeninhalt der durch f und g eingeschlossenen Fläche

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx\,.$$

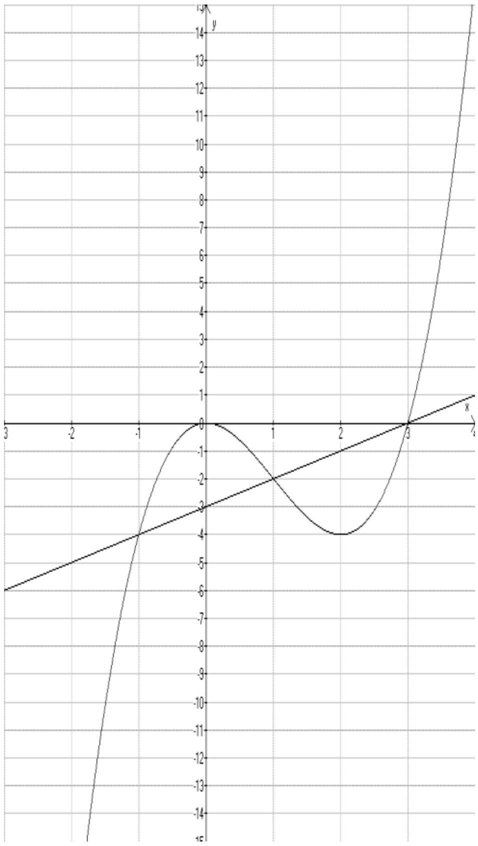
Wir bestimmen die Schnittpunkte der Funktionen:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^3 - 3x^2 = x - 3$$

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

Die Nullstellen berechnen wir mit dem Taschenrechner:
$x_{01} = -1$; $x_{02} = 1$; $x_{03} = 3$.



Damit gilt:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - g(x)\right)dx + \int_{1}^{3} \left(g(x) - f(x)\right)dx$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 3x^2 - (x-3)\right)dx + \int_{1}^{3} \left(x - 3 - \left(x^3 - 3x^2\right)\right)dx$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx + \int_{1}^{3} \left(-x^3 + 3x^2 + x - 3\right)dx$$

$$A = \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) - 3\left(\frac{(1)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - \left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + 3\left(1 - (-1)\right) +$$

$$-\left(\frac{(3)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4}\right) + 3\left(\frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right) + \left(\frac{(3)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) - 3\left(3 - 1\right)$$

$$A = 8$$