2.3. Extremalprobleme und Rekonstruktionen

2.3.1. Rekonstruktionen von Funktionen

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit folgenden Eigenschaften:

- 0 und –3 sind Nullstellen der Funktion
- Der Punkt E (3; –6) ist relativer Tiefpunkt der Funktion

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat die allgemeine Form $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Es müssen also die Koeffizienten a, b, c und d bestimmt werden. Um vier Unbekannte eindeutig bestimmen zu können, benötigt man vier Gleichungen.

1. Bedingung: Der Punkt A (0; 0) liegt auf f.

$$\text{I} \qquad 0=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d$$

2. Bedingung: Der Punkt B (–3; 0) liegt auf f.

$$\text{II} \qquad 0=a\cdot(-3)^3+b\cdot(-3)^2+c\cdot(-3)+d$$

3. Bedingung: Der Punkt E (3; –6) liegt auf f.

$$\text{III} \qquad -6=a\cdot 3^3+b\cdot 3^2+c\cdot 3+d$$

4. Bedingung: Der Punkt E (3; –6) ist Tiefpunkt von f

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$\text{IV} \qquad 0=3a\cdot 3^2+2b\cdot 3+c$$

Damit erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcrcrcrl}
I & 0 & = & & & & & & d \\
II & 0 & = & -27a & + & 9b & - & 3c & \\
III & -6 & = & 27a & + & 9b & + & 3c & \\
IV & 0 & = & 27a & + & 6b & + & c &
\end{array}$$

Wir lösen:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
II+III & -6 & = & 0a & + & 18b & + & 0c \\
 & b & = & -\frac{1}{3} & & & &
\end{array}$$

b einsetzen in II und IV

$$\begin{array}{llcrcrcr}
II & 0 & = & -27a & - & 3 & - & 3c \\
 & 3 & = & -27a & & & - & 3c \\
IV & 0 & = & 27a & - & 2 & + & c \\
 & 2 & = & 27a & & & + & c
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr}
II+IV & 5 & = & 0a & - & 2c \\
 & c & = & -\frac{5}{2} & &
\end{array}$$

Damit ergibt sich mit einer der Gleichungen II bis IV $a=\frac{1}{6}$ und f hat die Gleichung $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{2}x$

Es muss noch überprüft werden, ob die gefundene Funktion auch die hinreichende Bedingung für den Extremwert erfüllt.

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{2}x$$
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{5}{2}$$
$$f''(x)=x-\frac{2}{3}$$
$$f''(3)=3-\frac{2}{3}>0\Rightarrow TP$$

Damit erfüllt die gefundene Funktion als einzige Lösung die vorgegebenen Bedingungen.